

خاصية طاليس العكسية : ABC مثلث معلوم و A و B و M مستقيمة، و A و C و N مستقيمة.

في هذا الترتيب و $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ فإن $(MN) \parallel (BC)$

خاصية 1 : ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و \vec{AB} و \vec{CD} متجهتين مستقيمتين بحيث : $\vec{CD} = k \vec{AB}$

إذا كانت A' و B' و C' هي مساقط A و B و C بالتوالي على المستقيم (D) بتواز مع المستقيم (Δ) فإن : $\vec{C'D'} = k \vec{A'B'}$
نقول إن الإسقاط يحافظ على معامل استقامية متجهتين .

خاصية 2 : A و B نقطتان و I منتصف [AB]

إذا كانت A' و B' و I' هي مساقط A و B و I بالتوالي على المستقيم (D) بتواز مع مستقيم (Δ) فإن النقطة I' هي منتصف القطعة [A'B']
نقول إن الإسقاط يحافظ على منتصف قطعة .

خاصية 3 : ABC مثلث معلوم إذا كانت I و J منتصف [AB] و [AC] فإن $\vec{BC} = 2 \vec{IJ}$

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

نعتبر مثلثا ABC

1 - أنشئ نقطة D من المستقيم (AB) حيث :

$$\vec{AD} = \frac{3}{2} \vec{AB}$$

2 - المستقيم الموازي لـ (BC) يقطع (AC)

في E .

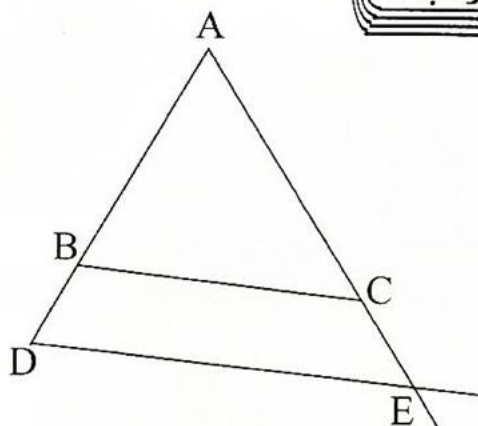
أ - حدد DE بدلالة BC

ب - بين أن :

$$\vec{AE} = \frac{3}{2} \vec{AC} \quad \text{و} \quad \vec{DE} = \frac{3}{2} \vec{BC}$$

الجواب :

1 -



2 - أ - ADE مثلث .

لدينا A و B و D مستقيمة، و A و C و E مستقيمة

في هذا الترتيب و $(DE) \parallel (BC)$

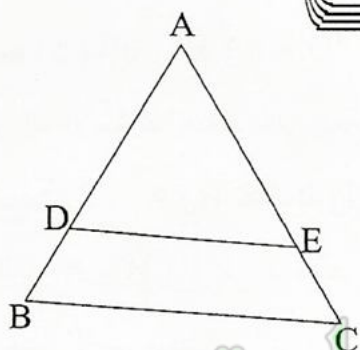
المستقيم (AB) ونقطة E من المستقيم (AC)

حيث : $\vec{DE} = \frac{1}{4} \vec{BC}$

حدد العددين الحقيقيين x و y حيث $\vec{DA} = x \vec{DB}$

و $\vec{CE} = y \vec{CA}$

الجواب :



(1)

لدينا ABC مثلثا و $(MN) \parallel (BC)$

و $D \in [AB]$ و $E \in [AC]$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

لدينا $\vec{AD} = \frac{2}{3} \vec{AB}$ إذن $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3} \quad \text{ومنه}$$

وبما أن \vec{AE} و \vec{AC} مستقيمتان ولهما نفس

المنحى فإن : $\vec{AE} = \frac{2}{3} \vec{AC}$

إذن $\vec{AC} + \vec{CE} = \frac{2}{3} \vec{AC}$

ومنه $\vec{CE} = \frac{2}{3} \vec{AC} - \vec{AC}$

إذن : $\vec{CE} = -\frac{1}{3} \vec{AC}$

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

لدينا $\vec{AD} = \frac{3}{2} \vec{AB}$ و $AD = \frac{3}{2} AB$

ومنه $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{2}$

وبالتالي : $\frac{DE}{BC} = \frac{3}{2}$

أي أن : $DE = \frac{3}{2} BC$

ب - لدينا $DE = \frac{3}{2} BC$

و \vec{DE} و \vec{BC} مستقيمتان ولهما نفس المنحى

إذن : $\vec{DE} = \frac{3}{2} \vec{BC}$

لدينا $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{2}$

إذن $AE = \frac{3}{2} AC$

وبما أن \vec{AE} و \vec{AC} مستقيمتان ولهما نفس

المنحى فإن :

$$\vec{AE} = \frac{3}{2} \vec{AC}$$

تمرين 2 :

(1) ABC مثلثا و D نقطة بحيث :

$$\vec{AD} = \frac{2}{3} \vec{AB}$$

النقطة E هي مسقط D على (AC) بتواز مع (BC)

حدد العدد x الحقيقي حيث $\vec{CE} = x \vec{AC}$

(2) ليكن ABC مثلثا، نعتبر نقطة D من

$$\vec{AE} = -\frac{1}{4} \vec{AC}$$

$$\vec{AC} + \vec{CE} = -\frac{1}{4} \vec{AC} \quad \text{إذن :}$$

$$\vec{CE} = -\frac{1}{4} \vec{AC} - \vec{AC} \quad \text{ومنه}$$

$$\vec{CE} = -\frac{5}{4} \vec{AC} \quad \text{إذن :}$$

$$\vec{CE} = \frac{5}{4} \vec{CA} \quad \text{إذن :}$$

تمرين 3 :

ABCD متوازي الاضلاع و (Δ) مستقيما

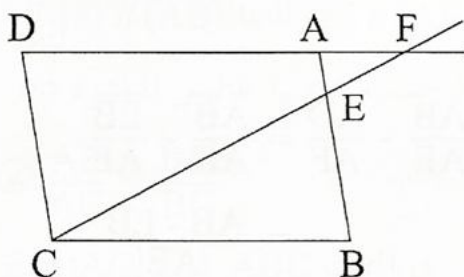
متغيرا مارا من النقطة C ويقطع المستقيم [AB] في

E والمستقيم (AD) في F.

$$(1) \text{ قارن النسبتين } \frac{BE}{AE} \text{ و } \frac{AD}{AF}$$

$$(2) \text{ استنتج أن : } \frac{AB}{AE} - \frac{AD}{AF} = 1$$

الجواب :

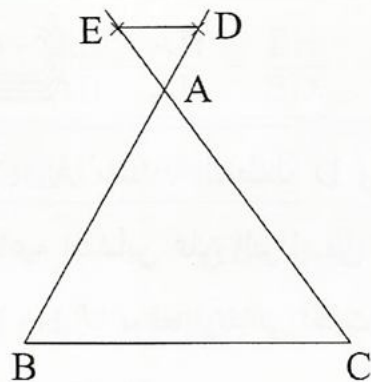


(1) نعتبر المثلث FDC

لدينا F و A و D مستقيمية، و E و C و

مستقيمية في هذا الترتيب و ($AE \parallel DC$)

(2)



لدينا ($ED \parallel BC$) و A و E و C مستقيمية،

و D و B مستقيمية في هذا الترتيب إذن حسب

خاصية طاليس المباشرة فإن :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{1}{4} \quad \text{إذن} \quad \vec{DE} = -\frac{1}{4} \vec{BC} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{ومنه} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4} \quad \text{وبما أن} \quad \vec{AD} \text{ و } \vec{AB}$$

مستقيمتان ولهما منحنيان متعاكسان فإن :

$$\vec{AD} = -\frac{1}{4} \vec{AB}$$

$$\vec{AD} = -\frac{1}{4} (\vec{AD} + \vec{DB})$$

$$\vec{AD} + \frac{1}{4} \vec{AD} = -\frac{1}{4} \vec{DB} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{5}{4} \vec{AD} = -\frac{1}{4} \vec{DB} \quad \text{أي أن}$$

$$5 \vec{AD} = -\vec{DB} \quad \text{إذن :}$$

$$-5 \vec{DA} = -\vec{DB}$$

$$\boxed{\vec{DA} = \frac{1}{5} \vec{DB}} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} \quad \text{لدينا :}$$

وبما أن \vec{AE} و \vec{AC} مستقيمتان ولهما منحنيان

متعاكسان فإن :

تمرين 4 :

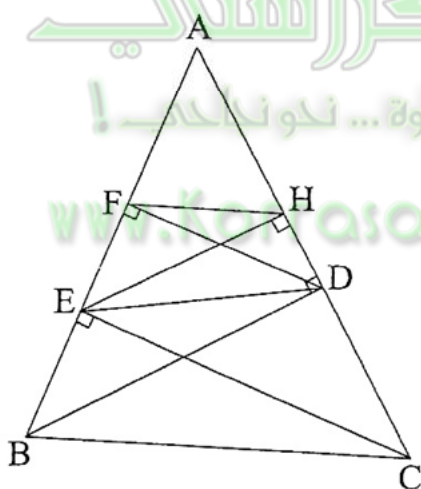
ليكن ABC مثلثا . النقطتان D و E هما
موقعا ارتفاعيه المنشأين على التوالي من B و C .
النقطتان F و H هما موقعا ارتفاعي المثلث ADE
على التوالي من D و E .

(1) - أنشئ الشكل

(2) - حدد صيغتين مختلفتين للجداء $AE \times AD$

(3) - أثبت أن : $(FH) \parallel (BC)$

الجواب :



(2) نعتبر المثلث ABC

لدينا $(EH) \perp (AD)$ و $(BD) \perp (AD)$

إذن : $(EH) \parallel (BD)$

و A و H و D مستقيمة، و A و E و B مستقيمة

في هذا الترتيب

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة :

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{FD}{FA} = \frac{FC}{FE} = \frac{DC}{AE}$$

لدينا كذلك A و E و B مستقيمة، و F و E و C

مستقيمة في هذا الترتيب و $(AF) \parallel (BC)$

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{EB}{EA} = \frac{EC}{EF} = \frac{BC}{AF}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{EB}{EA} = \frac{EC}{EF} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{FD}{FA} = \frac{FC}{FE} \quad \text{ولدينا}$$

$$\frac{FA + AD}{FA} = \frac{FE + EC}{FE} \quad \text{إذن :}$$

$$1 + \frac{AD}{FA} = 1 + \frac{FC}{FE} \quad \text{إذن :}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{AD}{FA} = \frac{EC}{FE} \quad \text{ومنه}$$

من $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ نستنتج أن :

$$\frac{EB}{EA} = \frac{AD}{AF}$$

(2) لدينا

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AE} - \frac{AD}{AF} &= \frac{AB}{AE} - \frac{EB}{AE} \\ &= \frac{AB - EB}{AE} \end{aligned}$$

$$= \frac{AE}{AE}$$

$$= 1$$

$$\frac{AB}{AE} - \frac{AD}{AF} = 1 \quad \text{إذن :}$$

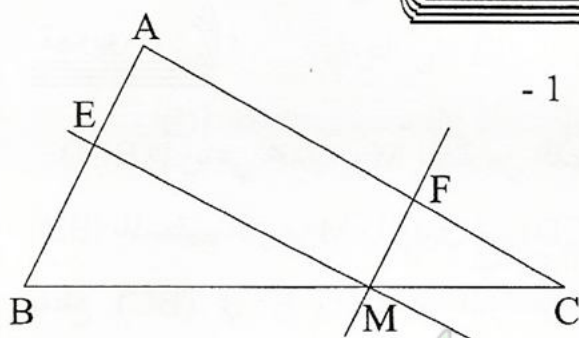
1 - قارن الخارجين : $\frac{AE}{AB}$ و $\frac{CM}{CB}$

ثم الخارجين : $\frac{AF}{AC}$ و $\frac{BM}{BC}$

2 - حدد موضع M على [AB] بحيث يكون

$$(EF) \parallel (BC)$$

الجواب :



في المثلث ABC مثلث لدينا $E \in [AB]$ و $M \in [BC]$

ولدينا $(EM) \parallel (AC)$ إذن حسب خاصية

$$\textcircled{1} \frac{AE}{AB} = \frac{CM}{CB}$$

في المثلث ABC دائما لدينا $F \in [AC]$

و $M \in [AB]$ ولدينا $(MF) \parallel (AB)$

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة فإن :

$$\textcircled{2} \frac{AF}{AC} = \frac{BM}{BC}$$

2 - في المثلث ABC لدينا $E \in [AC]$

و $F \in [AC]$ ولدينا $(EF) \parallel (BC)$

إذن حسب المبرهنة العكسية لطاليس فإن :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{EH}{BD}$$

$$\boxed{AB \times AH = AE \times AD} \quad \text{إذن :}$$

نعتبر المثلث AEC

لدينا $(EC) \perp (AE)$ و $(DF) \perp (AE)$

إذن : $(EC) \parallel (DF)$

و A و D و C مستقيمة، و A و E و F مستقيمة
في هذا الترتيب .

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AC} = \frac{FD}{EC} \quad \text{إذن}$$

$$\boxed{AF \times AC = AE \times AD} \quad \text{إذن :}$$

$$AE \times AD = AB \times AH \quad (3) \text{ لدينا}$$

$$AE \times AD = AF \times AC \quad \text{و}$$

$$AB \times AH = AF \times AC \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AH} \quad \text{ومنه :}$$

ولدينا A و H و C مستقيمة، و A و F و B مستقيمة

في هذا الترتيب

إذن حسب خاصية طاليس العكسية :

$$(FH) \parallel (BC)$$

تمرين 5 :

ABC مثلث و $M \in [AB]$ و E هي مسقط

النقطة M على (AB) بتواز مع (AC). F هي

مسقط النقطة M على (AC) بتواز مع (AB)

في المثلث DBC ولدينا $M \in [BD]$

و $E \in [BC]$ و $(DC) \parallel (ME)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$$\textcircled{2} \quad \frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BC}$$

من $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ نستنتج أن :

$$\frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BC}$$

إذن في المثلث ABC لدينا $E \in [BC]$

و $F \in [AB]$ و $(EF) \parallel (AC)$

ومنه حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن :

$$(AC) \parallel (EF)$$

تمرين 7 :

ABCD متوازي أضلاع، $M \in [AB]$ الموازي

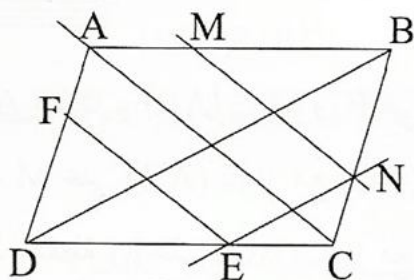
لـ (AC) المار من M يقطع (BC) في N

والموازي لـ (BD) المار من N يقطع (CD) في

E والموازي لـ (AC) المار من E يقطع (AD) في

F بين أن : $(MF) \parallel (BD)$

الجواب :



إذن من $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ نستنتج أن :

$$\frac{CM}{CB} = \frac{BM}{BC}$$

ومنه : $CM = BM$

وحيث أن $M \in [BC]$ فهذا يعني M منتصف $[BC]$.

تمرين 6 :

ABCD رباعي محدب و M نقطة من القطر

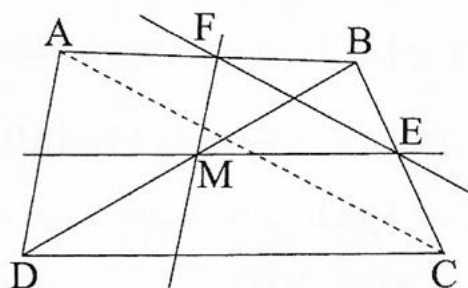
$[BD]$ ، المستقيم المار من M والموازي لـ (CD)

يقطع (BC) في E والمستقيم المار من M

والموازي لـ (AD) يقطع (AB) في F.

بين أن : $(EF) \parallel (AC)$

الجواب :



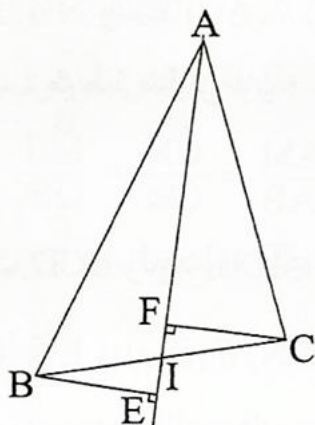
لدينا في المثلث ABD و $F \in [AB]$

و $M \in [BD]$ ولدينا $(MF) \parallel (AD)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$$\textcircled{1} \quad \frac{BF}{BA} = \frac{BM}{BD}$$

الجواب :



(1)

نعتبر p الاسقاط العمودي على (AI)

لدينا I منتصف القطعة [BC]

$p(C) = F$ و $p(B) = E$ و $p(I) = I$

إذن $p(I)$ منتصف القطعة [EF]

لأن الاسقاط يحافظ على منتصف قطعة

وبالتالي I منتصف القطعة [EF]

(2) لدينا I منتصف القطعتين [BC] و [EF]

إذن الرباعي BECF متوازي الاضلاع

وبالتالي : $CF = BE$

إذن B و C متساويتا المسافة عن المستقيم

المتوسط (AI).

تمرين 10 : (مبرهنة سيفا Ceva)

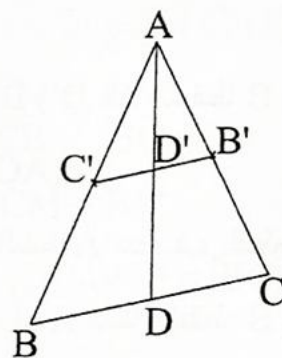
ABC مثلث نعتبر ثلاثة مستقيمت متوازية

تمر على التوالي من A و B و C وتقطع (BC)

و (AC) و (AB) في T و S و R على التوالي

1 - قارن النسبتين $\frac{AB}{AR}$ و $\frac{TB}{TC}$

(2)



نعتبر المثلث ABC

لدينا B' منتصف [AC]

C' منتصف [AB]

إذن $(B'C') \parallel (BC)$

ومنه $(C'D') \parallel (BD)$

نعتبر المثلث ABD

لدينا C' منتصف [AB]

و $(C'D') \parallel (BD)$

إذن المستقيم $(C'D')$ يقطع [AD] في منتصفها

أي أن D' منتصف [AD]

تمرين 9 :

ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة [BC].

النقطة E هي للسقط العمودي للنقطة B على (AI)

والنقطة F هي للسقط العمودي للنقطة C على (AI)

(1) - أثبت أن I منتصف [EF]

(2) - أثبت أن النقطتين B و C متساويتا المسافة

عن المستقيم المتوسط (AI).

إذن حسب مبرهنة طاليس فإن :

$$\frac{SC}{SA} = \frac{BR}{BA}$$

2 - لدينا

$$\frac{TB}{TC} \times \frac{SC}{SA} \times \frac{RA}{RB} = \frac{AB}{AR} \times \frac{BR}{BA} \times \frac{BA}{RB} = 1$$

وبالتالي :

$$\frac{TB}{TC} \times \frac{SC}{SA} \times \frac{RA}{RB} = 1$$

تمرين 11 :

ليكن ABC مثلثا و Q منتصف القطعة [AC]
و P من (BC) بحيث : $\vec{BP} = \frac{1}{3} \vec{BC}$

1 - لتكن J نقطة تقاطع (AC) مع الموازي
للمستقيم (BQ) المار من النقطة P ولتكن I
نقطة تقاطع (AP) و (BQ).

$$\vec{QC} = 3 \vec{QJ} \quad \text{أثبت أن}$$

$$\vec{PA} = 4 \vec{PI} \quad \text{و} \quad \vec{JA} = 4 \vec{JQ} \quad \text{استنتج أن}$$

2 - لتكن K نقطة تقاطع (BC) والموازي
للمستقيم (AP) المار Q .

$$\vec{BP} = \vec{PK} \quad \text{و} \quad \vec{PK} = \vec{KC} \quad \text{أثبت أن}$$

3 - لتكن R نقطة تقاطع (CI) و (AB) و L
نقطة تقاطع (AB) والموازي للمستقيم (CI)
المار Q .

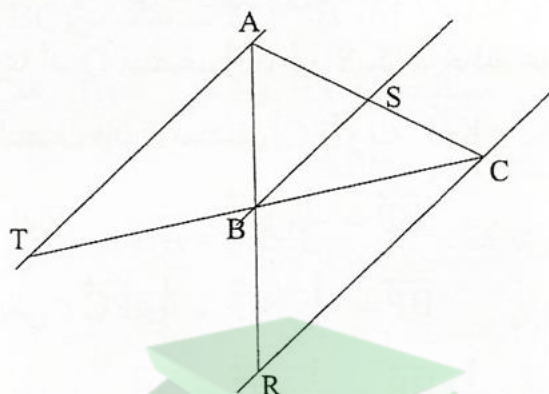
$$\vec{BA} = 3 \vec{BR} \quad \text{أثبت أن}$$

4 - لتكن M نقطة تقاطع (BC) والموازي

ثم النسبتين $\frac{BR}{BA}$ و $\frac{SC}{SA}$
2 - أحسب قيمة الجداء

$$\frac{TB}{TC} \times \frac{SC}{SA} \times \frac{RA}{RB}$$

الجواب :



في المثلث ARC لدينا : $S \in [AC]$
و $B \in [AR]$ و $(RS) \parallel (RC)$
إذن حسب مبرهنة طاليس فإن :

$$\textcircled{1} \quad \frac{AB}{AR} = \frac{AS}{AC}$$

في المثلث SAT لدينا : $S \in [AC]$
و $B \in [CT]$ و $(BS) \parallel (AT)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$$\textcircled{2} \quad \frac{TB}{TC} = \frac{AS}{AC}$$

من ① و ② فإن :

$$\frac{AB}{AR} = \frac{TB}{TC}$$

في المثلث ACR لدينا : $S \in [AC]$
و $B \in [AR]$ و $(BS) \parallel (RC)$

إذن A: و I و P مساقط A و Q و J على التوالي
على (AP) بتواز مع (PJ) وبما أن $\vec{JA} = 4 \vec{JQ}$
والاسقاط يحافظ على الاستقامية ومعاملها فإن:
 $\vec{PA} = 4 \vec{PI}$

2 - لدينا A، Q، C ثلاث نقط من (AC)
مساقتها على التوالي على (BC) بتواز مع (AP)
وبما أن Q منتصف [AC] والاسقاط يحافظ على
المنتصف فإن K منتصف [PC] ومنه $\vec{PK} = \vec{KC}$

$$\begin{aligned} \vec{BP} &= \frac{1}{3} \vec{BC} && \text{لدينا} \\ \vec{BP} &= \frac{1}{3} \vec{BC} - \frac{1}{3} \vec{PC} && \text{يعني} \\ \vec{BP} - \frac{1}{3} \vec{BP} &= \frac{1}{3} \vec{PC} && \text{يعني} \\ \frac{2}{3} \vec{BP} &= \frac{1}{3} \vec{PC} && \text{يعني} \\ 2 \vec{BP} &= \vec{PC} && \text{يعني} \\ 2 \vec{BP} &= 2 \vec{PK} && \text{يعني} \\ \vec{BP} &= \vec{PK} && \text{إذن} \end{aligned}$$

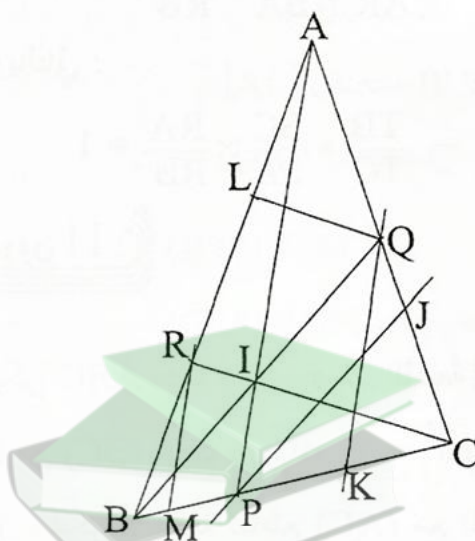
3 - لدينا A، L، R ثلاث نقط من (AB)
وهي مساقط A و Q و C من (AC) على التوالي
بالتوازي مع (CI) وبما أن Q منتصف [AC]
فإن L منتصف [AR]
إذن: $\vec{AL} = \vec{LR}$
كذلك في المثلث BQK لدينا: $P \in [BK]$
و P منتصف [BK] و $I \in [BK]$
و (PI) // (KQ) إذن I منتصف [BQ]

للمستقيم (AP) المار R.

أثبت أن $\vec{BP} = 3 \vec{BM}$

استنتج أن $\vec{RC} = 4 \vec{RI}$ و $\vec{MC} = 4 \vec{MP}$

الجواب :



1 - لدينا B، P، C ثلاث نقط من (BC) و C
و J و Q مساقطها على (AC) بتواز مع (BQ)
وبما أن $\vec{BP} = \frac{1}{3} \vec{BC}$

والاسقاط يحافظ على الاستقامية ومعاملها فإن :

$$\vec{QC} = 3 \vec{QJ} \quad \text{أي} \quad \vec{QJ} = \frac{1}{3} \vec{QC}$$

$$\vec{JA} = \vec{JQ} + \vec{QA} \quad \text{لدينا}$$

$$\vec{JA} = \vec{JQ} + \vec{CQ} \quad \text{يعني}$$

$$\vec{JA} = \vec{JQ} + 3 \vec{JQ} \quad \text{يعني}$$

$$\vec{JA} = 4 \vec{JQ} \quad \text{وبالتالي}$$

في المثلث APJ لدينا: $I \in [AP]$ و $Q \in [AJ]$

و (IQ) // (PJ)

$$\vec{BM} + \vec{MC} = 3\vec{BM} + 3\vec{MP} \quad \text{يعني}$$

$$\vec{MC} = 2\vec{BM} + 3\vec{MP} \quad \text{يعني}$$

$$\vec{MC} = \vec{MP} + 3\vec{MP} \quad \text{يعني}$$

$$\vec{MC} = 4\vec{MP} \quad \text{ومنه}$$

في المثلث RCM لدينا : $I \in [RC]$

و $P \in [MC]$ و $(RM) \parallel (IP)$

إذن حسب مبرهنة طاليس فإن :

$$\frac{RC}{RI} = \frac{MC}{MP}$$

$$RC = 4RI \quad \text{ومنه}$$

$$\vec{RC} = 4\vec{RI} \quad \text{وبما أن } I \in [RC] \text{ فإن}$$

بنفس الكيفية في المثلث BQL نستنتج ان R

$$\vec{LR} = \vec{RB} \quad \text{منتصف [BL] ومنه}$$

$$\vec{BA} = \vec{BR} + \vec{RL} + \vec{LA} \quad \text{لدينا}$$

$$= \vec{BR} + \vec{BR} + \vec{BR}$$

$$\vec{BA} = 3\vec{BR} \quad \text{ومنه}$$

4 - لدينا M ، B ، P ثلاث نقط من (BC)

وهي مساقط B و R و A على التوالي على

(BC) بتواز مع (AP)

$$\vec{BA} = 3\vec{BR} \quad \text{وبما أن}$$

$$\vec{BP} = 3\vec{BM} \quad \text{فإن}$$

$$\vec{BC} = 3\vec{BP} \quad \text{لدينا}$$

