

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$:

• Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

• Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Nếu phương trình có a và c trái dấu thì $\Delta > 0$. Khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

3. Công thức nghiệm thu gọn

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và $b = 2b', \Delta' = b'^2 - ac$:

• Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

• Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

• Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

4. Hệ thức Viet

• **Định lý Viet:** Nếu x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

• Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \quad (\text{Điều kiện để có hai số đó là: } S^2 - 4P \geq 0).$$

5. Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

(1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$

(1) có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

(1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

(1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Chú ý: Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm:

- Nếu nhẩm được: $x_1 + x_2 = m + n$; $x_1 x_2 = mn$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = m$, $x_2 = n$.
- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- a) $(x+1)^2 - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$ b) $9(x-2)^2 - 4(x-1)^2 = 0$ c) $2x^2 - 3(2x-3)^2 = 0$
 d) $x^2 - 4x + 3 = 0$ e) $x^2 + 6x - 16 = 0$ f) $7x^2 + 12x + 5 = 0$
 ĐS:

Bài 2. Giải các phương trình sau:

- a) $3x^2 - 5x + 8 = 0$ b) $5x^2 - 3x + 15 = 0$ c) $x^2 - 4x + 1 = 0$
 d) $3x^2 + 7x + 2 = 0$ e) $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$
 f) $(5 - \sqrt{2})x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$
 ĐS:

Bài 3. Giải các phương trình sau:

- a) $10x^2 + 17x + 3 = 2(2x - 1) - 15$ b) $x^2 + 7x - 3 = x(x - 1) - 1$
 c) $2x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x - 1) + 3$ d) $5x^2 - x - 3 = 2x(x - 1) - 1 + x^2$
 e) $-6x^2 + x - 3 = -3x(x - 1) - 11$ f) $-4x^2 + x(x - 1) - 3 = x(x + 3) + 5$
 g) $x^2 - x - 3(2x + 3) = -x(x - 2) - 1$ h) $-x^2 - 4x - 3(2x - 7) = -2x(x + 2) - 7$
 i) $8x^2 - x - 3x(2x - 3) = -x(x - 2)$ k) $3(2x + 3) = -x(x - 2) - 1$
 ĐS:

Bài 4. Tìm m để các phương trình sau:

- i) có nghiệm ii) có 2 nghiệm phân biệt iii) có nghiệm kép iv) vô nghiệm
 a) $9x^2 - 6mx + m(m - 2) = 0$ b) $2x^2 - 10x + m - 1 = 0$ c) $5x^2 - 12x + m - 3 = 0$
 d) $3x^2 - 4x + 2m = 0$ e) $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$
 ĐS:

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau:

- a) $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ y + x^2 = 4x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x + y) - 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0 \end{cases}$
 ĐS: a) $(1; 3), (5; -5)$ b) $\left(3; \frac{5}{2}\right), \left(\frac{11}{3}; 3\right)$ c) $(4; -3), \left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{3}\right)$

Bài 6. Cho phương trình: $x^2 - 2(3m + 2)x + 2m^2 - 3m + 5 = 0$.

- a) Giải phương trình với $m = -2$.
 b) Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -1 .
 c) Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm kép.

ĐS:

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$.

- Giải phương trình với $m = 3$.
- Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -4 .
- Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm kép..

ĐS:

Bài 8. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$.

- Giải phương trình với $m = -1$ và $m = 3$.
- Tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng 4 .
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

ĐS:

Bài 9. Xác định m để mỗi cặp phương trình sau có nghiệm chung:

- $x^2 + mx + 2 = 0$ và $x^2 + 2x + m = 0$
- $x^2 - (m+4)x + m + 5 = 0$ và $x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0$

ĐS:

Bài 10. Không giải phương trình, hãy nhẩm nghiệm các phương trình sau:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-----------------------|
| a) $x^2 - 10x + 16 = 0$ | b) $x^2 - 15x + 50 = 0$ | c) $x^2 - 6x + 5 = 0$ |
| d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ | e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ | f) $x^2 - x - 20 = 0$ |
| g) $x^2 + 5x - 6 = 0$ | h) $x^2 + 5x + 6 = 0$ | i) $x^2 - 5x + 6 = 0$ |

ĐS:

Bài 11. Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm là các cặp số sau:

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| a) 10 và 8 | b) 10 và -8 | c) 3 và $\frac{1}{4}$ |
| d) $-\frac{3}{4}$ và $-\frac{2}{3}$ | e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ | f) $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$ |

ĐS:

Bài 12. Với các phương trình sau, tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng x_0 . Tìm nghiệm còn lại:

- | | |
|---|--|
| a) $3x^2 + 7x + m = 0; x_0 = 1$ | b) $15x^2 + mx - 1 = 0; x_0 = \frac{1}{3}$ |
| c) $x^2 - 2(3m+1)x + 2m^2 - 2m - 5 = 0; x_0 = -1$ | d) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5m - 2 = 0; x_0 = 1$ |

ĐS:

Bài 13. Cho phương trình: $(m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$.

- Giải phương trình với $m = -2$.
- Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $x_1 = 2x_2$.

ĐS:

Bài 14. Cho phương trình: $2x^2 - 6x + m + 7 = 0$.

- Giải phương trình với $m = -3$.
- Với giá trị nào của m thì phương trình có một trong các nghiệm bằng -4 .

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = -2x_2$.

ĐS:

Bài 15. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = -4$.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = 3x_2$.

ĐS:

Bài 16. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của mỗi phương trình sau. tính giá trị của các biểu thức:

$$A = x_1^2 + x_2^2; \quad B = x_1^3 + x_2^3; \quad C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad D = \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

a) $x^2 + mx + 1 = 0$

b) $x^2 + 6x + m = 0$

c) $x^2 - (m-3)x + 2m + 1 = 0$

ĐS:

Bài 17. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$.

a) Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm m để biểu thức $B = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

c) Tìm m để biểu thức $C = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

ĐS:

Bài 18. Tìm m để mỗi phương trình sau có các nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức đã cho:

a) $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1.$

b) $x^2 - 2(m-2)x + m^2 + 2m - 3 = 0; \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}.$

c) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0; \quad x_1^2 + x_2^2 = 8.$

ĐS:

Bài 19. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$.

a) Tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -2 . Tìm nghiệm còn lại.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

ĐS:

Bài 20. Cho phương trình: $x^2 - (2a-1)x - 4a - 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của a .

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào a .

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

ĐS:

Bài 21. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$.

a) Xác định m để phương trình có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 4x_2 = 3$.

b) Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 mà không phụ thuộc vào m .

ĐS:

Bài 22. Cho phương trình: $mx^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hiệu hai nghiệm x_1, x_2 bằng 2.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m .

ĐS:

Bài 23. Với mỗi phương trình sau, tìm m để phương trình:

i) Có hai nghiệm trái dấu

ii) Có hai nghiệm dương phân biệt

iii) Có đúng một nghiệm dương.

a) $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$

b) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$

c) $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$

d) $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0$

ĐS:

Bài 24. Cho phương trình: $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - 4x_2 = 11$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

c) khi phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

ĐS:

PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Giải phương trình khi biết giá trị của tham số.

Bài 1. Giải phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Bài 2. Giải phương trình $3x^2 + 12x - 6\sqrt{3} = 0$

Bài 3. Giải phương trình $x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} = 0$

Dạng 2: Tìm giá trị tham số khi biết số nghiệm của phương trình.

▪ Đặt điều kiện $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

▪ Tính Δ hoặc Δ'

- Để phương trình vô nghiệm thì $\Delta < 0$ hoặc $\Delta' < 0$

- Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta = 0$ hoặc $\Delta' = 0$

- Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$ hoặc $\Delta' > 0$

Tổng quát: Để chứng minh phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Cách 1: Chứng minh $a.c < 0$

Cách 2: Chứng minh $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 2m + 1 = 0$

- a) Tìm m để phương trình vô nghiệm.
- b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 2. Cho phương trình $(m + 3)x^2 + 2(m + 5)x + m + 1 = 0$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Bài giải

Điều kiện $m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$

Xét $\Delta' = (m + 5)^2 - (m + 3)(m + 1) = 6m + 22$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6m + 22 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{11}{3}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $-\frac{11}{3} < m \neq -3$

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 3)x + 2m + 6 = 0$

Tìm m để phương trình có nghiệm kép.

Bài giải

Xét $\Delta' = (m + 3)^2 - (2m + 6) = m^2 + 4m + 3$

Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = -3 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm kép khi $m = -1$ hoặc $m = -3$

Bài 4. Cho phương trình $(2m - 10)x^2 + (3m - 15)x + m + 1 = 0$

Tìm m để phương trình có nghiệm kép.

Bài giải

Điều kiện $2(m - 5) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 5$

Xét $\Delta = (m - 5)(m - 53)$

Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta = 0 \Leftrightarrow (m - 5)(m - 53) = 0 \Leftrightarrow m = 53$

Vậy phương trình có nghiệm kép khi $m = 53$.

Dạng 3: Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt

Bài 1. Cho phương trình $7x^2 - (3m+1)x - m^2 - 1 = 0$

CMR phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Bài giải

Ta có $a.c = 5.(-m^2 - 1) = -5(m^2 + 1) < 0 \quad \forall m$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 2. Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + 2m - 4 = 0$

CMR phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Bài giải

Ta có $\Delta' = (m+3)^2 - (2m-4) = m^2 + 4m + 4 + 9 = (m+2)^2 + 9 > 0$ với mọi m.

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Bài 3. Cho phương trình $(m^2 - m + 3)x^2 - 2(m+3)x - 5 = 0$

CMR phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Bài giải

Ta có $a = m^2 - m + 3 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} \neq 0$ với mọi m.

$$\begin{aligned} \Delta' &= (m+3)^2 + 5(m^2 - m + 3) = m^2 + 6m + 9 + 5m^2 - 5m + 15 \\ &= 6m^2 + m + 24 = 6(m + \frac{1}{2})^2 + \frac{69}{2} > 0 \quad \forall m \end{aligned}$$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Dạng 4: Giải và biện luận phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

Phương pháp giải

- Nếu $a = 0$ thì phương trình trở thành $bx + cy = 0$
- Nếu $b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -\frac{c}{b}$
- Nếu $b = 0$ và $c \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b = 0$ và $c = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm.
- Nếu $a \neq 0$ thì phương trình trở thành phương trình bậc hai có biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ (hay $\Delta' = b'^2 - ac$)
- Nếu $\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$) thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$) thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$) thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Bài 1. Giải và biện luận phương trình $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$

Bài 2. Giải và biện luận phương trình $(m-3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $3x^2 + 7x + 2 = 0$

b) $(5 - \sqrt{2})x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$

Bài 2. Cho phương trình $5x^2 - 12x + m - 3 = 0$

Tìm m để phương trình sau có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó.

Bài 3. Xác định m để phương trình $(m^2 - 1)x^2 + mx + 5 = 0$ vô nghiệm

Bài 4. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

CMR phương trình $b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ vô nghiệm

Bài 5. Xác định m để phương trình $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ có đúng một nghiệm.

Bài 6. Cho phương trình $(5m^2 + 1)x^2 + (31m - 13)x - 6 = 0$

CMR phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2(m-4)x - 6m + 1 = 0$

CMR phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 8. Xác định m để 2 phương trình $x^2 + mx + 2 = 0$ và $x^2 + 2x + m = 0$ có nghiệm chung.