

## TD d'électricité 3

### Série N°2

[Sites.google.com/site/saborpcmath/  
cours en ligne](https://sites.google.com/site/saborpcmath/cours-en-ligne)  
par whatsapp: 0638148874

#### Exercice N°1 :

En électromagnétisme, le potentiel scalaire et le potentiel vecteur ont été introduits à partir des équations de Maxwell. L'objet de cet exercice est d'en établir les équations de propagation dans une région vide de source.

1/Rappeler les équations de Maxwell.

2/Montrer qu'on peut en déduire l'existence d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire.

3/On se place dans une région vide de source. Montrer que le potentiel scalaire vérifie :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t})$$

4/De même, montrer que le potentiel vecteur est solution de :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t})$$

5/On admet qu'il est possible de se placer dans la jauge de Lorentz. Le potentiel vecteur et le potentiel scalaire vérifient alors l'identité :  $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ . Simplifier les équations obtenues dans les deux questions précédentes. Commenter.

#### Exercice N°2 :

L'espace est rapporté à un trièdre direct orthonormé (Oxyz) de vecteurs unitaires ( $e_x, e_y, e_z$ ). On considère une onde électromagnétique plane de pulsation  $\omega$  se propage dans le vide dans une direction du plan xOy faisant l'angle  $\theta$  avec l'axe Ox. Le champ électrique associé à cette onde s'écrit en M(x, y, z) à l'instant t :

$$\vec{E} = E_0 \exp(j(\omega t - ax - by)) \vec{e}_z$$

où  $E_0, a$  et  $b$  sont des constantes positives.

1/Ecrire l'équation de propagation du champ  $\vec{E}$  dans le vide. En déduire la relation liant  $a, b, c$  et  $\omega$ .

2/Que représentent les coefficients  $a$  et  $b$  ? Exprimer en fonction de  $a$  et  $b$  les expressions de  $\lambda$ , longueur d'onde et  $\Theta$ , angle entre l'axe Ox et la direction de propagation.

3/Exprimer le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$ . Que peut-on dire des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en chaque point?

#### Exercice N°3 :

Une onde plane progressive monochromatique est polarisée circulaire gauche. Elle se propage dans le vide selon l'axe Ox.

1/Donner l'expression de cette onde de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $k$  et rappeler la relation entre  $\omega$  et  $k$ .

2/En déduire l'expression du champ  $\vec{B}$ .

#### **Exercice N°4 :**

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

1/Rappeler l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs électrique  $\vec{E}(M, t)$  et magnétique  $\vec{B}(M, t)$ .

2/On suppose que le champ électrique est de la forme :  $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$ .

a/A quelle équation doit satisfaire k pour que ce champ soit solution de l'équation appelée à la question 1 ?

b/Quels sont la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?

c/Quel est l'état de polarisation de cette onde ?

d/Quelle est la structure de cette onde ?

e/Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  associé à  $\vec{E}$  ainsi que le vecteur de Poynting de l'onde.

#### **Exercice N°5 :**

On considère une onde électromagnétique dans le vide pour laquelle le champ électromagnétique s'écrit dans un repère cartésien orthonormé classique :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \vec{u}_x + E_{0y} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \vec{u}_y + E_{0z} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = B_{0x} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \vec{u}_x + B_{0y} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \vec{u}_y + B_{0z} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \vec{u}_z$$

Avec  $\omega, c, E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}, B_{0x}, B_{0y}$  et  $B_{0z}$  sont des constantes.

1/Ecrire, en précisant leur nom, les équations de Maxwell. Que deviennent ces relations en absence de courant et de charges ?

2/Quelle est la direction et le sens de propagation de cette onde ? Justifier la réponse.

3/A partir de ces équations, montrer que  $E_{0y} = 0$  et  $B_{0y} = 0$ .

4/Quelle est la propriété fondamentale de l'onde plane la question précédente retrouve elle ?

5/On suppose de plus (pour simplifier) que  $E_{0x} = 0$ . Montrer que  $B_{0z} = 0$  et  $B_{0x} = \frac{E_{0z}}{c}$ . Quelles propriétés fondamentales de l'onde plane retrouve-t-on ?

6/Quel est le type de polarisation de l'onde ? Justifier la réponse.

7/Déterminer le vecteur de Poynting de l'onde ainsi décrite.

8/Exprimer l'impédance de l'onde défini par  $Z = \mu_0 \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|}$  en fonction de  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$ , perméabilité et permittivité du vide.

**Sites.google.com/site/saborpcmath/  
cours en ligne  
par whatsapp: 0638148874**

## Série 2

Ex 1:

1. Dans le vide, les eq de Maxwell s'écrivent:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{M-}\phi$$

$$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{M-A}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{M-F}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{M-G}$$

2/ On montre qu'on peut (à partir des eq de Maxwell) l'existence d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  et d'un potentiel scalaire  $v$

\* On sait que:  $\text{div rot } \vec{A} = 0 \quad \forall \vec{A}$

de l'éq M- $\phi$  ( $\text{div } \vec{B} = 0$ ) on peut montrer l'existence d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  appelé potentiel vecteur tel que:

$$\boxed{\vec{B} = \text{rot } \vec{A}} \quad / \quad \text{Le champ } \vec{A} \text{ n'est pas unique}$$

\* D'autre part, si on remplace le champ magnétique par son expression en fonction du potentiel vecteur dans l'éq de M-F, on a:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A})$$

$$\Rightarrow \text{rot } \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

le champ  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  est donc à rotationnel partout nul, il existe par conséquent un champ scalaire, appelé potentiel scalaire (voir ex 1 série 1) tel que:  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } v$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

le signe  $\ominus$  est une convention liée à celle adoptée pour l'énergie électrostatique.

3/ Montrons que le potentiel scalaire vérifie :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

Appliquons l'opérateur div sur  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\text{div} \vec{E} = -\vec{\text{grad}} \text{div} V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A}$$

or on a :  $\vec{\text{grad}} \text{div} V = +\Delta V$  (simple à démontrer)

$$\Rightarrow \text{div} \vec{E} = 0 = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A}$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A}$$

on ajoute  $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$  pour chaque côté de cette relation

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)}$$

4/ Montrons que le potentiel vecteur est solution de :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\text{grad}} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

on applique l'opérateur vectoriel rot sur  $\vec{B}$

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot rot} \vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$= \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\text{grad}} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)}$$

12

5/ On se place dans la jauge de Lorentz qui vérifie,

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Les équations des deux dernières questions s'écrivent alors :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

il s'agit d'équation de d'Alembert

La jauge de Lorentz est la condition nécessaire sur les potentiels (vecteur et scalaire) pour qu'ils se déplacent de la même manière que les champs électrique et magnétique  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

Ex 2 :

$$\vec{E} = E_0 \exp j(\omega t - ax - by) \vec{e}_z$$

$E_0, a$  et  $b$  sont des constantes positives.

1/ L'équation de propagation du champ  $\vec{E}$  dans le vide s'écrit :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En injectant l'expression de  $\vec{E}$  dans l'éq de propagation, on trouve :

$$\Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \times j \times (-a) \times (-a) E_0 \exp j(\omega t - ax - by) \\ + j \times j \times (-b) \times (-b) E_0 \exp j(\omega t - ax - by) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(a^2 + b^2) E_0 \exp j(\omega t - ax - by) \end{pmatrix}$$

[3]

$$\text{or } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega^2 E_0 \exp j(\omega t - ax - by) \end{pmatrix}$$

L'équation de propagation doit vérifier :

$$\boxed{a^2 + b^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

2/ En général le champ  $\vec{E}$  s'écrit :

$$\vec{E}^0 = E_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_z$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = ax + by = (k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z) \cdot (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)$$

$$= k_x x + k_y y + k_z z = 0 \quad k_z = 0 \quad k_x = a \quad k_y = b$$

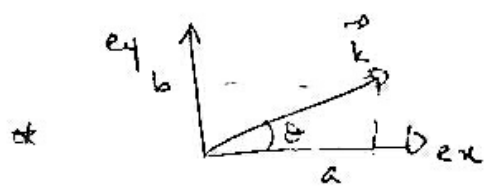
$$\Rightarrow \vec{k}^0(a, b, 0)$$

$a$  et  $b$  sont les composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}$

$$\boxed{\vec{k}^0 = a \vec{e}_x + b \vec{e}_y}$$

$$* \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{avec } k^2 = a^2 + b^2$$



$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3/ L'expression  $\vec{B}$  peut être tirée soit de l'éq de M-F ou

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad / \quad \text{on choisit celle dernière:}$$

$$= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \exp j(\omega t - ax - by) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b E_0}{\omega} \exp j(\omega t - ax - by) \\ -\frac{a E_0}{\omega} \exp j(\omega t - ax - by) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex3

L'onde est plane progressive monochromatique et polarisée circulaire gauche, l'onde se propage dans le vide selon l'axe Ox

1/ 
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - kx - \varphi) \end{pmatrix}$$

La polarisation est circulaire gauche :

$$E_y = E_z = E_0 \quad \text{et} \quad \varphi = \pi/2$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - kx - \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \sin(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

et l'éq que décrit l'extrémité du champ  $\vec{E}$  est :

$$\left(\frac{E_y}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_0}\right)^2 = 1.$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{\omega}{c}$$

2/ 
$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \sin(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 \sin(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E_0}{c} \sin(\omega t - kx) \\ \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$



### Ex 4 :

1/ Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  satisfont aux équations aux dérivées :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

2/  $\vec{E}(m, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{U}_x$

a/ A partir de l'équation de propagation de  $\vec{E}$   
on peut tirer que  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \underline{k = \frac{\omega}{c}}$

b/ direction de cette onde est l'axe  $Oz$   
sens de propagation est le sens positive de l'axe  $(Oz)$   
vitesse de propagation est  $c = \text{célérité}$

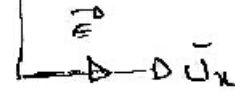
c/  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{U}_x$

L'onde est à polarisation rectiligne, l'expression du champ est sous forme :

$$\vec{E} = E_0 (\cos \alpha \vec{U}_x + \sin \alpha \vec{U}_y) \cos(\omega t - kz)$$

avec  $\cos \alpha = 1$  et  $\sin \alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$



d/ La structure d'une O.P.P se propageant dans le sens positif de l'axe  $(Oz)$  est la suivante :

$$\underline{\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{U}_z} \quad \underline{\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{U}_z \wedge \vec{E}}$$

tel que :  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{U}_z)$  forme un trièdre direct et  $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$



e)  $\vec{B}$  se calcule par la relation vectorielle:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cos(\omega t - kz)$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y}$$

le vecteur de pointing  $\vec{\Pi}$ :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z}$$

Ex 5:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \\ E_{0y} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \\ E_{0z} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_{0x} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \\ B_{0y} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \\ B_{0z} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \end{pmatrix}$$

1/ Les équations de Maxwell sont:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

En absence de courant et de charges ( $\vec{j} = \vec{0}$  et  $\rho = 0$ ), ces équations deviennent:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 0 & m-G \\ \text{div } \vec{B} = 0 & m-\phi \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & m-F \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & m-A \end{cases}$$

2/

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{y}{c} \right) \right) \\ = \vec{E}_0 \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} y \right) = \vec{E}_0 \cos \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{c} y = (k_x \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z) (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z) \\ = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$\Rightarrow k_x = 0 \quad \text{et} \quad k_z = 0 \quad \text{et} \quad k_y = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega}{c} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc l'onde se propage selon  $\vec{u}_y$  et dans le sens positif de  $y$  puisque la forme du champ  $\vec{E}$  ou de  $\vec{B}$  est progressive.

$$3/ * \operatorname{div} \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ = 0 + E_0 y \frac{\omega}{c} \sin \left( \omega \left( t - \frac{y}{c} \right) \right) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = E_0 y \frac{\omega}{c} \sin \left( \omega \left( t - \frac{y}{c} \right) \right) = 0$$

Cette dernière relation est vraie à tout instant  $t$ , en particulier pour  $\sin \left( \omega \left( t - \frac{y}{c} \right) \right) \neq 0$ , ce qui entraîne  $\boxed{E_0 y = 0}$

\* On procède de la même manière avec  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 + B_0 y \frac{\omega}{c} \sin \left( \omega \left( t - \frac{y}{c} \right) \right) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow B_0 y \frac{\omega}{c} \sin \left( \omega \left( t - \frac{y}{c} \right) \right) = 0$$

vraie à tout instant, en particulier pour  $\sin \left( \omega \left( t - \frac{y}{c} \right) \right) \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{B_0 y = 0}$$

4/  $E_0 y = B_0 y = 0$ , alors la propriété fondamentale c'est que  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  sont  $\perp$  à la direction de propagation, l'onde est transversale