www.tutorialmatematik.blogspot.com
www.facebook.com/tutorialmatematik

(Form 5)

Matriks (Matrices)

SPM < paper 1 (2 - 3 soalan)
paper 2 (1 soalan)

- nombor-nombor yang disusun dalam baris (row) dan lajur (column) untuk membentuk satu susunan segiempat didalam kurungan.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

← Baris 1
← Baris 2

↑ Lajur 1, ↑ Lajur 2, ↑ Lajur 3

- matriks yang mempunyai m (row) baris dan n (column) lajur dikenali sebagai m x n matriks

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ } 2 baris ⇒ matriks 2 x 2
2 lajur

2) $\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ } 2 baris ⇒ matriks 2 x 1
(matriks lajur / column matrix)
1 lajur

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ } 1 baris ⇒ matriks 1 x 2
(matriks baris / row matrix)
2 lajur

* Setiap nombor didalam matriks dinamakan unsur / element bagi matriks.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ matriks A mempunyai 6 unsur/element

* unsur yang terletak di baris i dan lajur j bagi sesuatu matriks dilabelkan sbg a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} = 1 & a_{13} = 3 \\ a_{12} = 3 & a_{23} = 1 \end{matrix}$$

$a_{21} = 2$, $a_{22} = 4$

a_{21}: baris 2, lajur 1 ; a_{22}: baris 2, lajur 2

* Matriks yang mempunyai bilangan baris dan lajur yang sama dikenali sebagai matriks sejemput sama (square metrix)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \times 2 \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \times 3$$

* Dua matriks dikatakan matriks sama (equal matrices) jika kedua-duanya mempunyai peringkat yang sama dan unsur sepadan yang sama

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = C$, $A \neq B$, $B \neq C$

Contoh soalan utk equal matrices

Diberi $A = \begin{pmatrix} 2a+b & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & c-3 \\ -3 & a-b \end{pmatrix}$

Cari nilai a, b dan c jika matriks A dan B adalah matriks sama.

Solution :

Diberi $A = B$

$$\begin{pmatrix} 2a+b & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c-3 \\ -3 & a-b \end{pmatrix}$$

→ padankan setiap unsur

$2a + b = 1$ — ①

$a - b = 5$ — ②

$c - 3 = 2$ — ③

→ persamaan ③ boleh diselesaikan dulu :

$c - 3 = 2$

$c = 2 + 3 = 5$

→ cari nilai a dan b guna persamaan serentak

~~③~~ ① + ② $3a + 0 = 6$

$a = 6/3 = 2$

$\Rightarrow a - b = 5$ — ②

$2 - b = 5$

$b = 2 - 5 = -3$

$\therefore a = 2, b = -3, c = 5$ //

Operasi keatas Matriks

1) Tambah & Tolak :
   - boleh dilakukan hanya jika 2 matriks tersebut mempunyai peringkat yang sama.
   - operasikan unsur-unsur yg sepadan dalam setiap matriks

Cth:

① $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 \\ 1+(-7) \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

$3\times1 \quad 3\times1$

3×1
(menghasilkan peringkat matriks yg sama)

②
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-1 & -2-5 & 4-9 \\ 5-2 & -3-6 & 7-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -5 \\ 3 & -9 & 8 \end{pmatrix}$$

2) pendaraban matriks dengan nombor

i. $5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times1 & 0\times5 \\ 2\times5 & 3\times5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$

ii. $-2\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times-3 \\ -2\times7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$

3) pendaraban 2 matriks

- hanya boleh didarab jika bilangan lajur dalam matriks pertama = bilangan baris dalam matriks kedua.

$$A \times B = C$$
$$m \times n \quad n \times p \quad m \times p$$

(n sama, baru boleh didarab)

i. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ⇒ boleh didarab

$2 \times 2 \quad 2 \times 1$ (sama)

ii. $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ ⇒ tak boleh didarab

$2 \times 1 \quad 2 \times 1$ (tak sama)

- untuk melakukan operasi darab : setiap unsur dlm baris matriks pertama didarab dengan setiap unsur yg sepadan dlm matriks yang kedua, kemudian ditambahkan.

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 2 \times 4)$$
$$= (3 + 8)$$
$$= (11)$$

$1 \times 2 \quad 2 \times 1 \quad 1 \times 1$

ii. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \boxed{1\ 2} \\ 3\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 \\ \boxed{4} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times3+2\times4 & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$

$2\times2 \qquad 2\times2 \qquad\qquad 2\times2$

$= \begin{pmatrix} \boxed{1\ 2} \\ 3\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & \boxed{5} \\ 4 & \boxed{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1\times5+2\times6 \\ ? & ? \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3\ 4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 \\ \boxed{4} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 3\times3+4\times4 & ? \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3\ 4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & \boxed{5} \\ 4 & \boxed{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 25 & 3\times5+4\times6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 25 & 39 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(3\ 4) = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$

$2\times1 \quad 1\times2 \longrightarrow 2\times2$

$= \begin{pmatrix} 1\times3 & 1\times4 \\ 2\times3 & 2\times4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Contoh soalan operasi kecatas matriks

1) Jika $(4\ 3)\begin{pmatrix} 2k \\ 6k \end{pmatrix} = (13)$, maka $k = ?$

solution:

$(4 \times 2k + 3 \times 6k) = (13)$

$(8k + 18k) = (13)$

$(26k) = 13$

$26k = 13$

$k = 13/26 = 1/2$ ✱

2) Selesaikan $(4\ x)\begin{pmatrix} y & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (12\ \ y+1)$

Solution:

$(4y + 0x \quad 4(4) + 3x) = (12\ \ y+1)$

$(4y \quad 16 + 3x) = (12\ \ y+1)$

$4y = 12$

$y = 12/4 = 3$ ⟶ $16 + 3x = y + 1$

$16 + 3x = 3 + 1$

$16 + 3x = 4$

$3x = 4 - 16$

$3x = -12$

$x = \frac{-12}{3} = -4$

$\therefore x = -4, y = 3$ ✱

Matriks Identiti (Identity matrices)

- ialah matriks sejiempat sama dimana bila ia didarab dengan matriks lain, akan menghasilkan matriks itu juga.

I ⇒ matriks ~~songs~~ identiti

$$\boxed{AI = IA = A}$$

- contoh matriks identiti ialah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \times 3$$

Cth:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Contoh soalan

$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cari nilai $3A + (IA)$

$\Rightarrow 3A + A = 4A$

$= 4\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -16 \end{pmatrix}$ ✱

Matriks Songsang (Inverse Matrices)

- Jika $AB = BA = I$ (matriks identiti), maka:
  - i) matriks A ialah matriks songsang bagi B
  - ii) matriks B ialah matriks songsang bagi A
- ditulis sebagai A^{-1} (matriks songsang bagi A)
- bukan semua matriks segiempat sama mempunyai matriks songsang.

$$AB = BA = I$$
$$\Rightarrow A^{-1} = B \quad , \quad B^{-1} = A$$
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

* Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka

matriks songsang bagi A (A^{-1})

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

dimana $ad - bc \neq 0$

INGAT !!!

* Jika $ad - bc = 0$, maka matriks tersebut tidak mempunyai matriks songsang.

Contoh:

1) Cari matriks songsang bagi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2(3)-1(5)}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6-5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 1\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Semak jawapan:

↳ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}A = I$$

2) Diberi $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ m & 3 \end{pmatrix}$ dan $Q^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} n+6 & -2 \\ -m & -1 \end{pmatrix}$

Cari nilai m dan n

Solution:

Diberi $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ m & 3 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3-2m}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -m & -1 \end{pmatrix}$$

⇒ Bandingkan dengan yang diberi dlm Soalan:

$$\frac{1}{-3-2m}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -m & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} n+6 & -2 \\ -m & -1 \end{pmatrix}$$

Didapati ada 2 persamaan:

$-3-2m = 7$ dan $n+6 = 3$

$-2m = 7+3$ $\qquad n = 3-6 = -3$

$-2m = 10$

$m = \frac{10}{-2} = -5$

$\therefore m = -5$ dan $n = -3$ #

3) Diberi $P = \begin{pmatrix} a-1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dan P tidak mempunyai matriks songsang. Cari nilai a

Solution:

Diberi P tiada matriks songsang,

maka $ad - bc = 0$

$(a-1)2 - 6(-3) = 0$

$2a - 2 - (-18) = 0$

$2a - 2 + 18 = 0$

$2a + 16 = 0$

$2a = -16$

$a = \frac{-16}{2} = -8$ #

Menyelesaikan persamaan serentak menggunakan kaedah matriks

* Tips SPM ⇒ Soalan biasa dlm kertas 2 SPM

- Jika diberi 2 persamaan linear :

$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

ia boleh ditulis sebagai bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

nilai x dan y bleh dicari menggunakan matriks songsang.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\text{identiti } I}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}$$

INGAT !!

Contoh soalan

Selesaikan persamaan serentak berikut dengan menggunakan kaedah matriks

$$3x + 4y = 1$$
$$2x - y = 8$$

Solution :

Tukar dlm bentuk matriks :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

note :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3-8}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1-32 \\ -2+24 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -33 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-33}{-11} \\ \frac{22}{-11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\therefore x = 3, y = -2$ #

Contoh Soalan SPM Kertas 2

a) Diberi $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ialah matriks songsang bagi matriks $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Cari nilai k.

b) Tuliskan persamaan serentak dibawah kedalam bentuk matriks:

$$4x - 5y = -9$$
$$-2x + 3y = 3$$

Kemudian selesaikannya menggunakan kaedah matriks

Solution

a) Diberi matriks songsang bagi $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{12-10}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 5/2 \\ 2/2 & 4/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 5/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bandingkan kedua-dua belah, $k = 5/2$ ✱

b) $4x - 5y = -9$

$-2x + 3y = 3$

Dalam bentuk matriks

$$= \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

daripada jawapan utk soalan (a) →

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & 5/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2(-9) + 5/2(3) \\ 1(-9) + 2(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{27}{2} + \frac{15}{2} \\ -9 + 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{2} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\therefore x = -6, y = -3$ #

Jangan lupa tulis jawapan anda seperti ini. Jangan tulis $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sbg jwpn !!

Tips extra:

* Jika soalan seperti ini:

$$4x - 5y = -9$$
$$3y - 2x = 3$$

susun dahulu kedua-dua persamaan supaya penyebut x dan y berada di kedudukan yang sama

$$\Rightarrow \quad 4x - 5y = -9$$
$$-2x + 3y = 3$$

* Berhati-hati dengan tanda positive dan negatif bila anda melakukan operasi ke atas matriks.

* Jika suatu matriks tiada matriks songsang, maka $ad - bc = 0$

*