

Exercice1

Un point mobile M effectue une trajectoire plane donnée par les équations en coordonnées polaires :

$$r(t) = e^t \quad \text{et} \quad \theta(t) = t$$

- 1- Déterminer les composantes du vecteur vitesse déduire son module.
- 2- Déterminer les composantes du vecteur accélération déduire son module.
- 3- Déterminer la vitesse ainsi que l'accélération dans la base de frenet (intrinsèque).
- 4- Déduire le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.
- 5- Déduire le vecteur position en coordonnées cartésienne

Solution

$$\vec{v} = e^t (\vec{U}_r + \vec{U}_\theta) \quad 0.75p \quad v = \sqrt{2}e^t \quad 0.5p$$

$$\vec{a} = 2e^t \vec{U}_\theta \quad 0.75p \quad a = 2e^t \quad 0.5p$$

$$\vec{v} = \sqrt{2}e^t \vec{U}_t \quad 0.5p$$

$$\vec{a} = a_t \vec{U}_t + a_n \vec{U}_n$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{2}e^t \quad 0.75p$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{2}e^t \quad 0.75p$$

$$\rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{e^t}{\sqrt{2}} \quad 0.5p$$

$$\vec{OM} = e^t \cos t \vec{i} + e^t \sin t \vec{j} \quad 0.5p$$

Exercice2 (4points)

Un repère $R'(ox'y')$ en mouvement de translation par rapport à un repère $R(ox,y)$ fixe. Un mobile M est repéré dans le repère fixe R par ses coordonnées cartésiennes ($x=t^2+t+1$; $y=t+1$; $z=3t^2+4$) et dans le repère mobile R' par ses coordonnées cartésiennes ($x'=t^2+t+4$; $y'=t$; $z'=2t^2$).

- a) Déterminer la vitesse relative et la vitesse absolue.
- b) Déduire la vitesse d'entraînement.
- c) Déterminer l'accélération absolue, l'accélération relative, l'accélération d'entraînement

Solution

$$\left. \vec{V}_r = \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R'} = (2t+1)\vec{i}' + \vec{j}' + 4t\vec{k}' \quad 0.75p$$

$$\vec{V}_a = (2t+1)\vec{i} + \vec{j} + 6t\vec{k} \quad 0.75p$$

$$R // R' \Rightarrow \vec{i} = \vec{i}', \vec{j} = \vec{j}', \vec{k} = \vec{k}' \quad 0.25p$$

$$\vec{V}_e = 2t\vec{k} \quad 0.5p$$

R' est en mouvement rectiligne suivant l'axe oz 0.25p

$$\vec{a}_a = 2\vec{i} + 6\vec{k} \quad 0.5p$$

$$\vec{a}_r = 2\vec{i}' + 4\vec{k}' \quad 0.5p$$

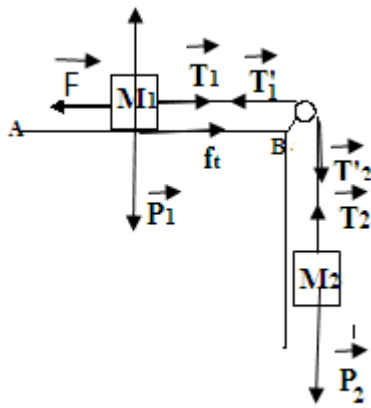
$$\vec{a}_e = 2\vec{k} \quad 0.5p$$

Exercice 3 (6,5 points)

Sur la figure1, deux corps M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 respectivement, sont reliés par un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. Le corps M_1 se trouve sur une table horizontale de surface non lisse [AB] avec un coefficient de frottement dynamique μ_1 . A l'autre extrémité du fil est suspendue une masse M_2 . Une force $\vec{F}=198\text{N}$ tire le corps M_1 vers la gauche (Avers B) et le corps M_2 vers le haut. on donne $\mu_1=0.3$, $m_1=6\text{kg}$, $m_2=9\text{kg}$, et $g=10\text{ m/s}^2$.

1. Représenter toutes les forces qui agissent sur les deux corps et la poulie.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'accélération du système. Déduire la nature du mouvement
3. Déterminer la valeur de la tension du fil.

Solution



(0.5pts) POUR LA FIGURE AVEC
TOUTES LES FORCES

2) Poulie

$$T_1 = T_2 \quad 0.5p$$

Corps M1

$$\vec{F} + \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R}_{1N} + \vec{f}_{1t} = m_1 \vec{a} \quad 0.5p$$

On fait une projection sur les deux axes (ox) et oy

$$\begin{aligned} F - T_1 - f_{1t} &= m_1 a & T_1 &= F - f_{1t} - m_1 a \\ R_{1N} - m_1 g &= 0 & R_{1N} &= m_1 g \end{aligned} \quad 1p$$

Sachant que $f_{1t} = \mu_1 R_{1N} = \mu_1 m_1 g$

$$T_1 = F + \mu_1 m_1 g - m_1 a \quad 0.5p$$

Corps M2

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a} \quad 0.5p$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

$$\Rightarrow T_2 = m_2 g + m_2 a \quad 0.5p$$

Comme les deux tensions sont égales alors

D'où

$$a = \frac{F - m_1 \mu_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} = 6m / s^2 \quad 1p$$

3 calcul de la tension

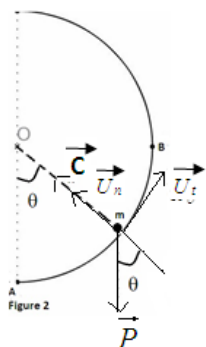
$$T_2 = m_2 (g + a) = 144 N \quad 1p$$

Exercice 3

Une bille de masse m est lancée à partir d'un point A avec une vitesse initiale et effectue un parcours lisse, suivant les lettres ABC formé par une sphère de rayon R (constant) (figure2). C représente la réaction du support et P le poids. En utilisant le théorème du moment cinétique et le système de Frenet (\vec{u}_T, \vec{u}_N) ,. Montrer qu'on trouve la relation

$$g \sin \theta = -R \ddot{\theta}$$

Solution



$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = -R\vec{u}_n \wedge mv\vec{u}_t = Rmv\vec{k} \quad 0.5p$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_0 = Rm \frac{dv}{dt} \vec{k} \quad 0.5p$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{P} = -R\vec{u}_n \wedge (-mg \sin \theta \vec{u}_t - mg \cos \theta \vec{u}_n) \quad 0.5p$$

$$= Rmg \sin \theta \vec{k} \quad 0.5p$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{C} = -R\vec{u}_n \wedge (C\vec{u}_n) = \vec{0} \quad 0.5p$$

$$-g \sin \theta = R \ddot{\theta} \quad 0.5p$$

Exercice 5 (2pts)

Soit un champ de force : $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$

Calculer le rotationnelle de cette force, que peut on en conclure ?

Solution

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = (1-1)\vec{k} = \vec{0} \quad 1p$$

C'est une force conservative 0.5p

Travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi 0.25p

Cette force dérive d'un potentiel $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(x, y)$ 0.25p