

T.D. Algèbre 2 : Série 1

Exercice 1.

1. a) Montrer que $C_{(0,1)} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ est un groupe abélien pour la multiplication des complexes.

b) En est-il de même pour $B = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 2\}$.

2. On munit l'ensemble $R =]-1, 1[$ de la loi de composition interne $*$, définie par :

$$\forall x, y \in R, x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Montrer que $(R, *)$ est un groupe abélien ?

Exercice 2.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne \star , telle que :

- \star est associative ,
- admet un élément neutre à gauche e , i.e. : $\forall x \in E, e \star x = x$ et
- tout élément de E possède un inverse à gauche, i.e. : $\forall x \in E, \exists y \in E, y \star x = e$.

Montrer que (E, \star) est un groupe.

Exercice 3.

1. Soit (G, \cdot) un groupe, tel que tout élément de G soit son propre inverse. Montrer que G est abélien.

2. Soient H un groupe multiplicatif, $a, b \in H$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que :

$$(ab)^n = e \implies (ba)^n = e.$$

Exercice 4.

Soit (G, \cdot) un groupe multiplicatif. On note $\mathbf{Z}(G) := \{a \in G \mid \forall b \in G, ab = ba\}$ (centre de G) et pour $a \in G$: $\mathbf{C}(a) := \{b \in G \mid ab = ba\}$ (commutant de a).

1. Montrer que $\mathbf{C}(a)$ et $\mathbf{Z}(G)$ sont des sous-groupes de G .

2. Soient $a, b \in G$ d'ordre respectivement, p et q premiers entre eux, avec $ab = ba$.

Montrer que ab est d'ordre pq .

Exercice 5.

Soit (G, \cdot) un groupe, non trivial, qui n'a pas de sous-groupe non trivial. Montrer que G est monogène, fini, et que $\text{Card}G$ est un nombre premier.

Exercice 6.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
 b) Est-ce que $2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?
2. Soit H un sous-groupe de \mathbb{Z} et $a = \min(H \cap \mathbb{N} \setminus \{0\})$.
 a) Montrer que $H \subseteq a\mathbb{Z}$.
 b) En déduire que $H = a\mathbb{Z}$
3. Soient (G, \cdot) un groupe et X, Y deux parties de G . On définit le produit $XY := \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$. Soient H et K deux sous-groupes de G :
 a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $H \cup K$ soit un sous-groupe de G .
 b) Montrer que HK est un sous-groupe de G si et, seulement si, $HK = KH$.

Exercice 7

1. Montrer que l'application $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow C_{(O,1)} ; z \mapsto \varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ est un homomorphisme de groupe.
2. Déterminer son image et son noyau.

Exercice 8

1. On munit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ de la loi \star définie par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in G, (x, y) \star (x', y') = (x' + xy', yy').$$

- a) Montrer que (G, \star) est un groupe. Est-il abélien ?
 b) Soit H un sous-groupe de \mathbb{R}^* . Est-ce que $\mathbb{R} \times H$ est un sous-groupe de G .
2. On munit $G' = \{N_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ et } b \neq 0\}$, de la multiplication $N_{(a,b)} \cdot N_{(a',b')} = N_{(a'+ab',bb')}$. Montrer que (G', \cdot) est un groupe. Est-il abélien ?
3. Montrer que (G, \star) et (G', \cdot) sont isomorphes.

Exercice 9

1. Montrer que l'application $\phi : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +), x \mapsto \phi(x) = \ln(x)$ est un homomorphisme de groupes.
2. Déterminer $\ker(\phi)$ et $\text{Im}(\phi)$.
3. En déduire que les deux groupes sont isomorphes.

Exercice 10

Soit (G, \cdot) un groupe, on note $\text{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G .

1. Pour $g \in G$, soit l'application $\phi_g : G \longrightarrow G, x \longmapsto \phi_g(x) = gxg^{-1}$.
 a) Montrer que ϕ_g est un homomorphisme de G .

- b) Pour $g, g' \in G$, montrer que $\phi_g \circ \phi'_g = \phi_{gg'}$.
- c) En déduire que pour tout $g \in G$, ϕ_g est inversible dans $\text{Aut}(G)$. Quel est son inverse.
- 2. Posons $\mathcal{T} = \{\phi_g \mid g \in G\}$. Montrer que \mathcal{T} est un sous-groupe de $(\text{Aut}(G), \circ)$.
- 3. Vérifier que l'application $\Psi : G \longrightarrow \text{Aut}(G)$, $g \longmapsto \Psi(g) = \phi_g$, est un homomorphisme de groupes.
- 4. Déterminer $\ker(\Psi)$ et $\text{Im}(\Psi)$.

Exercice 11

- 1. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
 - a) Déterminer le support de σ .
 - b) Décomposer σ en produit de transpositions, puis en produit de cycles disjoints.
 - c) En déduire la signature de σ .
- 2. Soit $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
 - a) Calculer $\sigma \circ \delta$ puis $\delta \circ \sigma$.
 - b) Déterminer l'inverse de σ .
 - d) Déterminer l'ordre de δ .