

---

## Examen du 21 mai 2015

---

**Exercices 1 :** Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**a)** Montrer que :  $|f(x, y)| \leq |xy|$ , en déduire la continuité de la fonction  $f$  en  $(0, 0)$

**b)** Calculer :  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .

**c)** Etudier la différentiabilité de la fonction  $f$  en  $(0, 0)$ .

**d)** Montrer que l'on a :  $x^4 + y^2 \geq 2x^2y, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Démontrer que :  $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| \leq \frac{7}{4} |y|$ ,  $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq \frac{7}{4} |x|$

**e)** En déduire que la fonction  $f$  est de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$ .

---

**Exercices 2 :** Une montagne a la forme de la surface d'équation

$$f(x, y) = 2xy - 2x^2 - y^2 - 8x + 6y + 5$$

- Calculer :  $\vec{\nabla} f(x, y)$

- Quelle est la hauteur de la montagne ( l'unité de mesure vaut 100 mètres )

---

**Exercices 3 :** On a la forme différentielle :

$$\omega = (3x^2y - 6y^2x) dx + (x^3 - 6x^2y) dy$$

a) Etudier l'exactitude de  $\omega$ .

b) En déduire la valeur de l'intégrale curviligne le long du demi-cercle supérieur de diamètre  $[AB]$  en allant de  $A$  vers  $B$ , avec  $A(0, 1)$  et  $B(2, 3)$

---

#### Exercices 4 :

On a les 4 points suivants  $A(2, 0)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(0, -1)$ ,  $I(1, 0)$ .

Soit  $\Gamma$  le contour  $OABCO$ , où  $AB$  est l'arc de cercle de centre  $I$ .

Calculer l'intégrale curviligne :  $\oint (x - y + 1)dx + (e^y + x)dy$ .

---

---

## Correction

---

### Exercice 1

a) On a :  $|f(x, y)| = \frac{|xy^3|}{x^4 + y^2} = \frac{|xy^3|}{y^2} = |xy|.$

d'où :  $0 \preceq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| \preceq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |xy| = 0 = f(0, 0)$

Ainsi la fonction  $f$  est continue en  $(0, 0)$

b)  $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{y^5 - 3x^4 y^3}{(x^4 + y^2)^2}$   
 $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{3x^5 y^2 + xy^4}{(x^4 + y^2)^2}$

c) Etude de la différentiabilité à l'origine :

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} y + \varepsilon(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\implies \frac{xy^3}{x^4 + y^2} = \varepsilon(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ce qui donne :

$$|\varepsilon(x, y)| = \left| \frac{xy^3}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \right| \preceq \left| \frac{xy^3}{x^4 + y^2} \right| \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \preceq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \preceq |x|$$

d'où :  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(x, y)| = 0 \implies$  la fonction  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ .

d) On a :  $(x^2 - y)^2 \succeq 0 \implies x^4 - 2x^2 y + y^2 \succeq 0 \implies x^4 + y^2 \succeq 2x^2 y$

On a ainsi :  $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| = \left| \frac{y^5 - 3x^4 y^3}{(x^4 + y^2)^2} \right| \preceq \left| \frac{y^5}{(x^4 + y^2)^2} \right| + 3 \left| \frac{x^4 y^3}{(x^4 + y^2)^2} \right|$   
 $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| = \left| \frac{y^5}{y^4} \right| + 3 \left| \frac{x^4 y^3}{(2x^2 y)^2} \right| = \frac{7}{4} |y|$

Avec la même démarche, on a aussi :  $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \preceq \frac{7}{4} |x|$

e) On a donc :

$$0 \preceq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, 0 \preceq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$$

et ainsi les dérivées partielles sont continues sur  $\mathbb{R}^2$   
 $\implies f$  est donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

## Exercice 2

- Calcul du gradient :  $\overrightarrow{\nabla f(x,y)} = \begin{cases} 2y - 4x - 8 \\ 2x - 2y + 6 \end{cases}$

- On a :  $\overrightarrow{\nabla f(x,y)} = \vec{0}$  ssi  $(x,y) = (-1,2)$ . On a un point stationnaire  $(-1,2)$

- On caractérise la nature du point critique en calculant les dérivées secondes

$$r = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -4, s = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2, t = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -2$$

Ce qui donne :  $\Delta' = s^2 - rt = -4$ , on a un extrémum,  $r$  est négatif c'est un maximum.

Comme  $f(-1,2) = 15$ , la hauteur de la montagne est égale à **1500** mètres.

## Exercice 3

On a :  $P(x,y) = 3x^2y - 6y^2x, Q(x,y) = x^3 - 6x^2y$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3x^2 - 12xy, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 12xy$$

$$\implies \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Comme  $\omega$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ , domaine simplement connexe

$\implies \omega$  est donc une forme différentielle exacte, donc elle admet une primitive  $f$

telle que :  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \omega \implies$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = 3x^2y - 6y^2x \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) = x^3 - 6x^2y \quad (2)$$

L'intégration de (1) implique :  $f(x, y) = x^3y - 3x^2y^2 + C(y)$

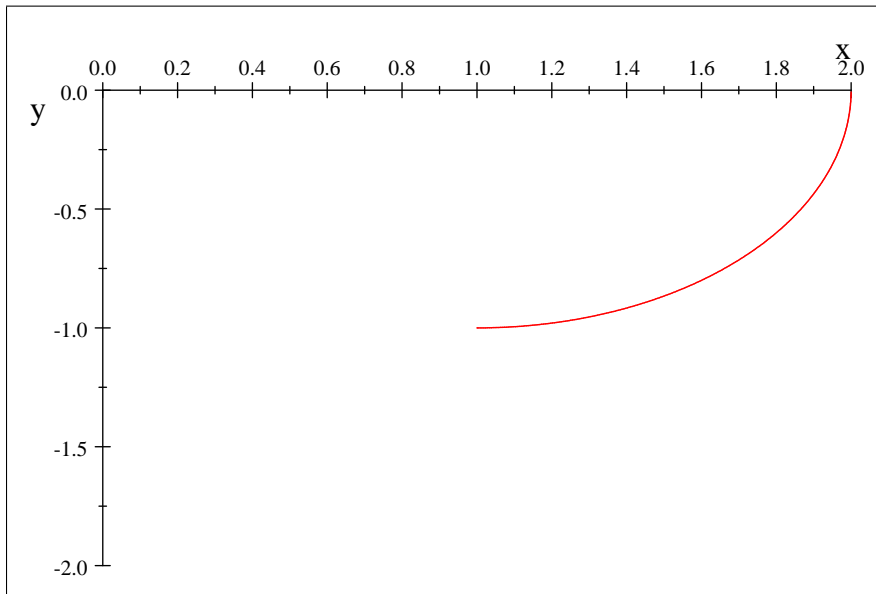
On calcule la dérivée partielle de la fonction  $f(x, y)$  par rapport à la variable  $y$ , on vérifie l'égalité (2), on obtient :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^3 - 6x^2y + C'(y) = Q(x, y) \implies C'(y) = 0 \implies C(y) = k$$

On a donc :  $f(x, y) = x^3y - 3x^2y^2 + k$

$$\text{d'où : } \int_{AB} \omega = [x^3y - 3x^2y^2 + k]_A^B = f(B) - f(A) = f(2, 3) - f(0, 1) = -84$$

## Exercice 4



Grappe

On peut décomposer l'intégrale curviligne comme suit :

$$\oint (x+1)dx + e^y dy + \oint xdy - ydx.$$

La première intégrale est nulle car on a une forme différentielle

exacte à intégrer sur un chemin fermé, la deuxième intégrale est égale à deux fois l'aire du domaine limité par le contour  $OABCO$ .

Ce quidonne : 
$$\oint (x+1)dx + e^y dy + \oint xdy - ydx = 2 + \frac{\pi}{2}.$$